《数值计算方法》期末考试归纳 by 喵星考拉 2018.7

# 第1章 误差误差来源：

模型误差（数学模型与实际问题之间的误差）观测误差/参量误差（观测产生的误差）

条件2：对于方程 *f*  *x*  0 ，若存在区间*a*, *b* 使

（1） *f*  *x* 在*a*, *b* 上连续

（2） *f* *a* *f* *b*  0 ；

（3）对任意 *x* *a*, *b*都有 *f*  *x*  0 ；

（4） *f*  *x* 在*a*, *b* 上保号

截断误差/方法误差（数值计算近似解和准确解之间的误差）舍入误差（计算机子长有限产生的误差）

**绝对误差**： e  *x*  *x*  *x* （近似值减去准确值）

则当初值 *x*0 *a*, *b* 且 *f*  *x*0  *f* ****  *x*0

# 第三章 线性方程组解法

  0 时，牛顿迭代序列收敛于区间上唯一实根 *x* 。

**误差限**（绝对误差限）：

*e*  *x* 

*x*  *x*

 ** 

1、高斯消元法（略）（也称顺序消元法）

工程上常表示为： *x* 

*x*  ** 

2、列主元消元法（让每一次消元的列主元绝对值尽可能的大）

3、LU分解法，分解 *A*  *LU* 后，分别解方程 *LY*  *b* 与*UX*  *Y*

*e*  *x*

*x*  *x*

*x*  *x*

4、雅可比迭代法

**相对误差**： *er*  *x*    

*x x x*

，相对误差限（常用百分数表示）

*n*  *n*

*x*

1/ 2

2



# 数值计算中需要注意的几个原则：

1. 选用数值稳定性好的算法

向量范数：1范数：

# 矩阵的范数：

*x* 1   *xi*

*i*1

2范数：

2   *xi* 

 *i*1 

 范数：

*x*  max *x*

 1*i**n i*

1. 相近两数避免相减
2. 绝对值太小的数不宜作除数
3. 避免大数吃小数的情况发生
4. 简化计算步骤，减少运算次数

1范数（列模）（每列各个元素绝对值相加之和，取最大）

2范数（谱模） 2

**  *AT A*

max

*A*



 范数（行模）（每行各个元素绝对值相加之和，取最大）

**第二章 非线性方程求根二分法**（操作略）

*b*  *a*  **

矩阵条件数（用来刻画方程组病态程度） *Cond*  *A* 

是病态的，很难求出其准确的解。

# 第4章 插值与拟合

*A*1 *A*

如果条件数特别大，则矩阵

对于任意给定的误差** ，只要二分次数满足不等式

2*k* 1

则可得到满足要求近似根

*n*   *x*  *x*  *x*  *x*  *x*  *x*  *x*  *x* 

*L*  *x*  *y* 0

*k* 1

*k* 1 *n*

局限性：不能求复数根和偶数重根

**拉格朗日**插值多项式：

*n k*  *x*

 *x*  *x*  *x*

 *x*  *x*

 *x*

 *x* 

*k* 0 *k* 0

*k k* 1

*k k* 1 *k n*

**迭代法**：将方程化为 *x*  *g*  *x* ，从而根据 *xk* 1  *g*  *xk* 

迭代法收敛的充分条件：

（1） 在区间*a*, *b* 上 *g* *x* 存在，且 *g* *x*  *L*  1

（2） 对任意 *x* *a*, *b*，都有 *g*  *x**a*, *b*

求解。

两点差值——线性插值；三点插值——抛物插值

高次的插值会导致Runge现象，在区间端点出现明显的震荡。

**牛顿法**：方程 *f*  *x*  0 近似线性化为 *f*  *xk*   *f*  *xk*  *x*  *xk*   0 从而得到迭代公式

*f*  *xk* 

*xk* 1  *xk* 

*f*   *xk* 

牛顿迭代法收敛的充分条件

条件1：对于方程 *f*  *x*  0 ，若存在区间*a*, *b* 使

1. 在区间*a*, *b* 内存在方程的单根 *x* ；
2. *f*  *x* 在区间*a*, *b* 内连续

则牛顿迭代法在 *x* 附近具有局部收敛性。

**三次样条插值**：每一段上都是不高于三次的多项式，保证段和段之间二阶导数连续。

*y*  *y*

* + *hf x* , *y* ，*y*

 *y*  *h*  *f x* , *y*

* + *f x*

,*y* 

一种比较简便的办法：利用*S*  *x* 在节点处的二阶导数值*M*

 *S* *x*  表示*S*  *x* ，用*S* *x*在内

2、改进欧拉法

*i*1 *i*

 *i i* 

*i*1

*i* 2 

 *i i* 

 *i*1

*i*1 

节点 *xi* 上的连续性和边界条件来确定*Mi*

*i i i*

记*Mi*  *S* *xi*  ， *hi*  *xi*  *xi*1 利用插值条件，整理得到

3、龙格库塔法

 *x*  *x*3

 *x*  *x* 3 

*M*  *x*  *x* 

*M*  *x*  *x* 

*S*  *x*  *M i*  *M*

*i*1   *y*

  *i*1 *h*2  *i* 

*y*   *i h*2  *i*1

*y*  *y*

 *h*  *K*

 2*K*

 2*K*

 *K* 

*i i*1 6*h*

*i* 6*h*

 *i*1

6 *i*  *h*

 *i* 6 *i*  *h*

 *i*1

*i* 6 1 2 3 4

*i i*  *i*

  *i* 

这样就将求n个函数*Si*  *x* 的问题转化为求n+1个未知数的问题利用一阶导数连续的条件：记

*K*1 



*f*  *xi* , *yi* 

*h h*

*K*  *f*  *x*  , *y*  *K* 

*h h* 1 6

 *y*  *y y*  *y* 

 2  *i* 2 *i*

2 1 

*i*   *i*

*i*   *i*  1 *i*

*gi* 

  *i*1 *i*   *i i*1 

从而得到

  

*hi*  *hi*1

*hi*  *hi*1

*hi*  *hi*1 

*hi*1

*hi* 

*K*  *f*  *x*   *h* , *y*

  *h K* 

 3  *i* 2 *i*

2 2 

*i Mi*1  2*Mi*  *i Mi*1  *gi*

*i*  1, 2,, *n* 1



*K* 

 

*f*  *xi*  *h*, *yi*  *hK*3 

区间有n个，未知数有n+1个，方程有n-1个，还需要两个边界条件，可以解出方程。解出 

4

Mi之后代入上面的方程即可求出S(x)。

# 最小二乘法：

**  *x*  *F* *a* , *a* ,, *a*

, *x* ,

选择参数使得*S*   *F* *a* , *a* ,, *a*

, *x*   *y* 2 取到最小值，也就是说

0 1 *n*

 0 1

*i*1

*m*

*n i i* 

点*a*, *a*,, *a* 是该方程组的极值点，因此解法方程组 *S*  0即可解出所求的参数。一般情况

0 1 *n*

*ak*

下法方程组不是线性的，当且仅当**  *x*  *F* *a*0 , *a*1 ,, *an* , *x*是由一系列已知函数的线性组合时，法方程组为线性方程组。此时可以代入矩阵求解。

 *n*  *xi*

 *a*  

 *yi* 

*y*  *a*  *bx*

当函数为线性拟合时，最小二乘法退化为：  *x*  *x* 2  *b*

 *x y*  ，

 *i i*

    *i i* 

# 数值积分

1、中点法： *M*

 *hf*   *a*  *b* 

*f* *a*  *f* *b*

2、梯形法： *T*  *h*

 2  2

 

中点法和梯形法的误差相反，且中点法准确性是梯形法的两倍，对其进行加权平均：

3、辛普森法则： *S*  2 *M*  1 *T*   *h*  *f* *a*  4 *f* *c* 



3 3 6

*f* *b*

# 微分方程：

1、欧拉法 设一阶方程可以写成 d*y* 

d*x*

*f*  *x*, *y*  ， *x* *a*, *b*， *y* *a*  *y*0

把*a*, *b* 分为*i* 等分，记分点为 *xi*

 *a*  *ih*

，则有 *y* *xi*  

*f*  *xi* , *yi*  

*f*  *xi* , *y*  *xi* 

用向前差商代替导数，有近似值 *yi*1  *yi*  *hf*  *xi* , *y*  *xi* 

欧拉公式步进法